A2024 – MATH II MPI

Concours commun

Mines-Ponts

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\operatorname{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G

- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\left\{s, s'\right\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe

- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la Figure 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \left\{\left\{1, 2\right\}, \left\{1, 5\right\}, \left\{1, 6\right\}, \left\{2, 3\right\}, \left\{2, 9\right\}, \left\{2, 8\right\}\right\}$$

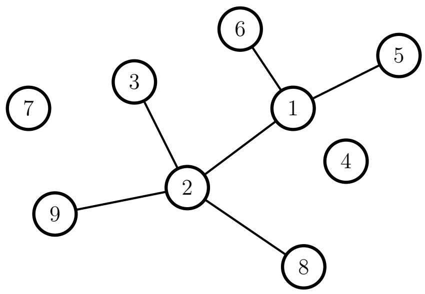


Figure 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \left\{s, s_1, s_2, \dots, s_d\right\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \left\{\left\{s, s_1\right\}, \left\{s, s_2\right\}, \dots, \left\{s, s_d\right\}\right\}$$

On a représenté Figure 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \left\{1, 3, 4, 5, 6, 8\right\}$.

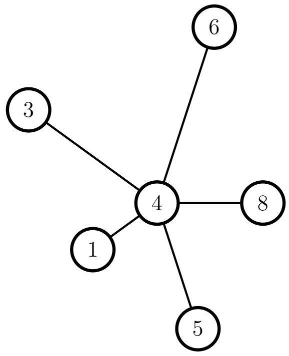


Figure 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \left\{s', t'\right\} \in A' \iff \left\{\sigma(s'), \sigma(t')\right\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la Figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

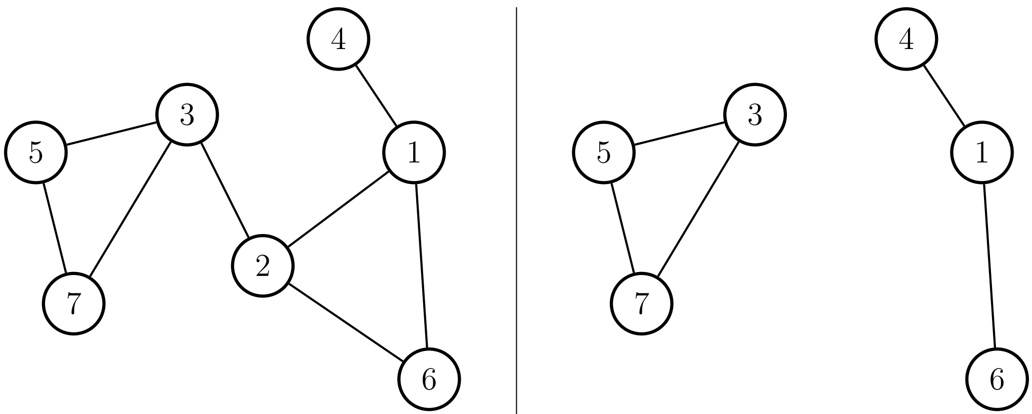
6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \left\{s\right\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple Figure 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G (b) Le graphe $G \setminus 2$

Figure 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \left\{\left\{s_1, s_2\right\}\right\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \backslash s_1} \times \chi_{G_2 \backslash s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\left\{0, 1\right\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left\{i, j\right\} \in A \\ 0 & \text{si } \left\{i, j\right\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \left\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\right\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\left\{i, j\right\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\left(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)\right)$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = \left(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P}\right)$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\left\{i, j\right\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\left\{G\right\})$ de l'événement élémentaire $\left\{G\right\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \mathrm{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

– si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0

– si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 ▷ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\big(\mathbf{E}(X)\big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 ▷ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 ▷ Montrer que si $\frac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 ▷ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

– l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{ H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!] \Big\}$$

– pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 $\triangleright$ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 $\triangleright$ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 $\triangleright$ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 $\triangleright$ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(n^{\omega_0}p_n\Big)=+\infty$.

21 ▷ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k=\sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 ▷ Montrer que $\Sigma_0\leq\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 ▷ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k\leq\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}c_0p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 ▷ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\leq q\leq r$, on a :

$$\binom{r}{q}r^{-q}\geq\frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k=\mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0\Big)^2\Big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 ▷ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2}=0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 ▷ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geq2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 ▷ Retrouver le résultat de la question 16 ▷ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

FIN DU PROBLÈME

Proposition de corrigé

1 ▷ Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à M ; en notant $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a :

pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$ et donc $u(e_{\rho(j)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,\rho(j)} e_i$.

Si on effectue le changement d'indice correspondant à la permutation ρ, on obtient :

pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_{\rho(j)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{\rho(i),\rho(j)} e_{\rho(i)}$.

Or, la famille $(e_{\rho(i)})_{1 \leq i \leq n}$ forme une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les matrices } M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } (m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ sont semblables}}$.

Si maintenant σ et σ' sont deux indexations de S et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, en notant $\rho = (\sigma')^{-1} \circ \sigma \in \mathcal{S}_n$:

$(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \iff \{\sigma'\big(\rho(i)\big), \sigma'\big(\rho(j)\big)\} \in A$;

soit $(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff (M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)} = 1$.

Comme les seules valeurs prises par une matrice du type $M_{G,\sigma}$ sont 1 et 0, on en déduit que les matrices $M_{G,\sigma}$ et $\Big((M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)}\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$ sont égales et comme cette dernière matrice est semblable à la matrice $M_{G,\sigma'}$ d'après l'encadré précédent :

$\boxed{\text{les matrices } M_{G,\sigma} \text{ et } M_{G,\sigma'} \text{ sont semblables}}$.

2 ▷ D'après la question précédente, le caractère diagonalisable est indépendant de l'indexation choisie. Dans tous les cas, en tant que matrice symétrique réelle :

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable}}$.

3 ▷ Là encore, d'après la question **??**, deux matrice semblables ayant même rang, le rang d'une matrice d'adjacence ne dépend pas de l'indexation choisie.

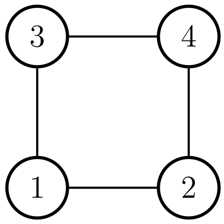
Si une matrice d'adjacence M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geq 1$ est non nulle, alors $n \geq 2$ (car les termes diagonaux de M sont nuls) et il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $m_{i,j} = 1$. Comme M est symétrique, $m_{j,i} = 1$ alors que $m_{i,i} = 0$; les colonnes d'indices i et j de M ne sont pas liées et $\mathrm{rg}(M) \geq 2$:

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1}}$.

4 ▷ Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe $G = ([\![1, n]\!], A)$ dont ses sommets non isolés forment le graphe de centre i et de branches $\big\{i, j_1\big\}, \big\{i, j_2\big\}, \dots, \big\{i, j_d\big\}$, alors les seules colonnes non nulles sont d'une part la colonne C_i d'indice i ayant $d + 1$ chiffres 1 et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \dots, j_d$ toutes identiques avec un seul terme non nul situé en ligne i ; ces colonnes sont libres avec la colonne C_i si bien que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}(C_i, C_{j_1})$ et donc :

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe dont ses sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2.}}$

La matrice $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2}}$, représente un carré



et n'est pas du type précédent.

5 ▷ On note $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$. Soit σ une indexation de S. Comme G' est une copie de G, il existe une bijection σ' de S dans S' telle que :
$\forall (s, t) \in S^2$, $(s, t) \in A \iff (\sigma'(s), \sigma'(t)) \in A'$. Alors :
$(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \iff \{\sigma'\big(\sigma(i)\big), \sigma'\big(\sigma(j)\big)\} \in A'$;
soit $(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff (M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)} = 1$.

Comme les seules valeurs prises par une matrice du type $M_{G,\sigma}$ sont 1 et 0, on en déduit que les matrices $M_{G,\sigma}$ et $\big((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)}\big)_{1 \le i,j \le n}$ sont égales et ont donc même polynôme caractéristique ; mais d'après **??**, les matrices $\big((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)}\big)_{1 \le i,j \le n}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont donc même polynôme caractéristique :
$\boxed{\text{si } G' \text{ est une copie de } G, \text{ alors } \chi_G = \chi_{G'}}$.

6 ▷ On sait que $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$ où M est la matrice d'adjacence du graphe considéré. Comme les coefficients de la diagonale de M sont nuls, $\boxed{a_{n-1} = 0}$.

Lorsqu'on développe le déterminant $\chi_G(X)$ par la formule

$$\chi_G(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

pour obtenir le coefficient de X^{n-2} il est nécessaire de choisir une permutation σ telle que $n-2$ valeurs de k donnent $\sigma(k) = k$ (pour obtenir les $n-2$ termes «en X») et deux valeurs de k telles que $\sigma(k) \neq k$. Ceci correspond obligatoirement à une transposition $\tau_{i,j}$ et le coefficient correspondant de X^{n-2} est alors $-a_{i,j} a_{j,i} = -a_{i,j}^2$ (le «$-$» étant la signature de la transposition).

Le coefficient $a_{i,j}^2$ est non nul (et vaut donc 1) si et seulement si $a_{i,j} = 1$ i.e. $\big\{i, j\big\} \in A$ et donc $\boxed{a_{n-2} = -|A|}$.

7 ▷ Soit $G = (S, A)$ une telle étoile et M sa matrice d'adjacence. On sait que $\operatorname{rg}(M) = 2$ et donc $\chi_G(X)$ est de la forme $\chi_G(X) = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$.

Or, $a_{n-1} = 0$ et donc $a = 0$ et $b = a_{n-2} = -|A| = -d$ si bien que :
$\boxed{\chi_G(X) = X^{n-2}(X^2 - d)}$.

Si l'étoile étudiée est de centre j (en indexant les sommets par $[\![1,n]\!]$), en notant $i_1, i_2, \ldots, i_d$ les sommets correspondant aux extrémités de l'étoile, la colonne C_j d'indice j de M est nulle sauf les termes d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_d$ valant 1.

Comme M est diagonalisable (symétrique réelle), on a $\dim\Big(\mathrm{Ker}(M)\Big) = n-2$.

D'ailleurs, en notant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{Ker}(M)$ est engendré d'une part par les vecteurs e_k tels que le colonnes C_k de M soient nulles et d'autre part par les vecteurs $e_{i_1} - e_{i_j}$ pour $j \in [\![2,d]\!]$.

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles étant dans

$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}(C_j, e_j)$, ces vecteurs sont de la forme $\lambda C_j + \mu e_j$ et on trouve facilement que $C_j + \varepsilon\sqrt{d} e_j$ est un vecteur propre associé à $\varepsilon\sqrt{d}$. Comme les espaces propres associés à $\varepsilon\sqrt{d}$ sont de dimension 1, on obtient finalement :

Les valeurs propres de M sont :

- 0 d'espace propre associé $\mathrm{vect}(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_d\}} \cup \mathrm{vect}(e_{i_1} - e_{i_j})_{j\in[\![2,d]\!]}$
- $\sqrt{d}$ d'espace propre associé $\mathrm{vect}(C_j + \sqrt{d} e_j)$
- $-\sqrt{d}$ d'espace propre associé $\mathrm{vect}(C_j - \sqrt{d} e_j)$

8 ▷ On note $n_k = |S_k|$ pour $1 \leq k \leq 2$ et quitte à utiliser une indexation, on peut supposer que les n_1 (resp. n_2) premiers (resp. derniers) sommets de G sont ceux de S_1 (resp. S_2) et que le $n_1{}^{\mathrm{e}}$ (resp. $(n_1+1)^{\mathrm{e}}$) sommet est s_1 (resp. s_2).

En notant M_1 (resp. M_2) la matrice d'adjacence du graphe G_1 (resp. G_2), on a :

$$\chi_G(X) = \left|\begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Big[XI_{n_1} - M_1\Big] & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & \multicolumn{4}{c}{\Big[XI_{n_2} - M_2\Big]} \end{array}\right|$$

Par multilinéarité, on obtient :

$\chi_G(X) =$

$$\left|\begin{array}{c|c} [XI_{n_1}-M_1] & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&0\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2] \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1']&\vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2] \end{array}\right|$$

Le premier déterminant est triangulaire par blocs et donne $\chi_{M_1}\chi_{M_2}$ et M_1' est obtenue à partir de $XI_{n_1}-M_1$ en supprimant sa dernière colonne ; on utilise encore la multilinéarité pour le second déterminant :

$\chi_G(X) =$

$$\chi_{M_1}\chi_{M_2} + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1']&\vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2] \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1']&\vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&\\ 0&\\ \vdots&[M_2']\\ 0&\end{matrix} \end{array}\right|$$

Cette fois, M_2' est obtenue à partir de $XI_{n_2}-M_2$ en supprimant sa première colonne.

Le premier déterminant triangulaire par blocs donne 0 car le déterminant supérieur gauche est nul (une colonne de 0). On développe finalement le dernier déterminant par rapport à la $n_1{}^{\text{e}}$ colonne puis encore par rapport à la $n_1{}^{\text{e}}$ colonne ($(n_1+1)^{\text{e}}$ colonne initiale) :

$$\chi_G(X) = \chi_{M_1}\chi_{M_2} + \left|\begin{array}{c|c} [M_1'] & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&\\ \vdots&[M_2'']\\ 0&\end{matrix} \end{array}\right| = \chi_{M_1}\chi_{M_2} - \left|\begin{array}{c|c} [M_1''] & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} & [M_2''] \end{array}\right|$$

où M_1'' et M_2'' sont les matrices d'adjacence de $G_1 \setminus s_1$ et de $G_2 \setminus s_2$ respectivement.

Finalement : $\boxed{\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X)\chi_{G_2}(X) - \chi_{G_1\setminus s_1}(X)\chi_{G_2\setminus s_2}(X)}$.

9 ▷ On utilise la formule de la question précédente avec s_1 et s_2 les centres des deux étoiles :

$\chi_G(X) = X^{d_1-1}(X^2-d_1)X^{d_2-1}(X^2-d_2) - X^{d_1}X^{d_2}$ (pour une étoile à d branches privée de son centre, il n'y a plus d'arêtes et son polynôme caractéristique est X^d).

On obtient $\chi_G(X) = X^{d_1+d_2-2}\Big((X^2-d_1)(X^2-d_2)-X^2\Big)$:

$\boxed{\chi_G(X) = X^{d_1+d_2-2}\Big(X^4-(d_1+d_2+1)X^2+d_1d_2\Big)}$.

Comme la matrice d'adjacence est symétrique réelle donc diagonalisable,

on a «$m_0 = d_0$» donc la dimension du noyau de cette matrice est d_1+d_2-2 (car $d_1d_2 \neq 0$) :

$\boxed{\begin{array}{l}\text{le rang de la matrice d'adjacence de la double étoile étudiée est :}\\ d_1+d_2+2-d_1+d_2-2=4.\end{array}}$

10 ▷ Comme G possède a arêtes, et donc que les $N-a$ autres arêtes sont inexistantes, on a : $\boxed{\{G\} = \bigcap\limits_{\{i,j\}\in A}(X_{\{i,j\}}=1)\bigcap\limits_{\{i,j\}\notin A}(X_{\{i,j\}}=0)}$ et $\boxed{\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}}$.

On a $\mathbf{P}(\Omega_n) = \sum\limits_{G\in\Omega_n}\mathbf{P}(\{G\})$.

Si on partitionne Ω_n par la famille $\Omega_n^{(k)}$ des graphes ayant k arêtes, on obtient, d'après l'encadré précédent :

$\mathbf{P}(\Omega_n) = \sum\limits_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p_n^kq_n^{N-k}$ (le coefficient $\binom{N}{k}$ correspondant aux possibilités de choix des k arêtes parmi les N arêtes potentielles).

Par la formule du binôme, on obtient : $\boxed{\mathbf{P}(\Omega_n) = (p_n+q_n)^N = 1^N = 1}$.

11 ▷ Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}$, par l'inégalité de Markov :

$\boxed{\mathbf{P}(X>0) = \mathbf{P}(X\geq 1) \leq \mathbf{E}(X)}$.

12 ▷ L'événement $(X=0)$ est inclus dans l'événement $\Big(|X-\mathbf{E}(X)|\geq \mathbf{E}(X)\Big)$ et donc :

$\boxed{\mathbf{P}(X=0) \leq \mathbf{P}\Big(|X-\mathbf{E}(X)|\geq\mathbf{E}(X)\Big) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2}}$ par Bienaymé-Tchebychev.

13 ▷ $\boxed{A_n \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(N,p_n)}$.

14 ▷ D'après la question 11 ▷, $0 \leq \mathbf{P}(A_n>0) \leq \mathbf{E}(A_n) = Np_n = \dfrac{n(n-1)}{2}p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}n^2p_n$ qui a pour limite 0. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n>0)=0}$.

15 $\triangleright$ D'après la question 12 $\triangleright$, (on a bien $\mathbf{E}(A_n) = Np_n \neq 0$) :

$$0 \leq 1 - \mathbf{P}(A_n > 0) = \mathbf{P}(A_n = 0) \leq \frac{\mathbf{V}(A_n)}{\big(\mathbf{E}(A_n)\big)^2} = \frac{Np_nq_n}{N^2p_n^2} = \frac{2(1-p_n)}{n(n-1)p_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2p_n} \text{ qui}$$

a pour limite 0. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1}$.

16 $\triangleright$ D'après les deux questions précédentes :

$\boxed{\text{la propriété «posséder au moins une arête» a pour fonction de seuil } \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geq 2}.}$

17 $\triangleright$ Comme X_H suit une loi de Bernoulli, $\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = \mathbf{P}(H \subset G)$;

or, $(H \subset G) = \bigcap\limits_{\{i,j\}\in A_H} (X_{\{i,j\}} = 1)$ et par indépendance des $X_{\{i,j\}}$:

$\boxed{\mathbf{E}(X_H) = \prod\limits_{\{i,j\}\in A_H} \mathbf{P}(X_{\{i,j\}} = 1) = p_n^{a_H}}$.

18 $\triangleright$ On a $\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{C}_0) = \binom{n}{s_0}c_0}$ car après avoir choisi les s_0 sommets d'un élément de $\mathcal{C}_0$, il suffit d'en faire des copies pour obtenir les éléments de $\mathcal{C}_0$ associés à ces sommets.

Une copie de G_0 menant avant tout à une bijection de S_0 dans un ensemble de sommets de même cardinal, et comme il y a $s_0!$ telles bijections :

$\boxed{\text{il y a au plus } s_0! \text{ copies isomorphes à } G_0 : c_0 \leq s_0!}$.

Comme il y a $\binom{n}{s_0}$ choix possibles d'ensemble de sommets pour tout graphe dans $\mathcal{C}_0$, on a donc : $\mathrm{card}(\mathcal{C}_0) \leq \binom{n}{s_0}s_0! = n(n-1)\cdots(n-s_0+1)$ et donc $\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{C}_0) \leq n^{s_0}}$.

19 $\triangleright$ On a tout simplement $\boxed{X_n^0 = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} X_H}$.

Comme X_H suit une loi de Bernoulli, $\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = \mathbf{P}(H \subset G)$ et donc :

$\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{E}(X_H) = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G)}$.

On obtient, d'après la question 17 $\triangleright$: $\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} p_n^{a_0} = \mathrm{card}(\mathcal{C}_0)p_n^{a_0} \leq n^{s_0}p_n^{a_0}}$.

20 $\triangleright$ Soit $H_0 \subset G_0$ tel que $\omega_0 = \dfrac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$.

On note aussi $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des copies de H_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1,n]\!]$, et Y_n^0 la variable aléatoire égale au nombre de copies de H_0 contenus dans G

Puisqu'une copie de G_0 donne a fortiori une copie de H_0, on a $X_n^0 \leq Y_n^0$ et donc $\mathbf{E}(X_n^0) \leq \mathbf{E}(Y_n^0)$

D'après les questions 11 ▷ et 19 ▷, $\boxed{\mathbf{P}(X_n^0 > 0) \leq \mathbf{E}(X_n^0) \leq \mathbf{E}(Y_n^0) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}}$.

On a $n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = (n^{\omega_0} p_n)^{a_{H_0}} = \mathrm{o}(1)$ Comme $0 \leq \mathbf{P}(X_n^0 > 0) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}$, il en résulte par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0}$.

21 ▷ D'après la question 19 ▷, $X_n^0 = \sum\limits_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$. On a donc :

$$(X_n^0)^2 = \left(\sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H\right)^2 = \left(\sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H\right)\left(\sum_{H' \in \mathcal{C}_0} X_{H'}\right) = \sum_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} X_H X_{H'}.$$

Donc, $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbf{E}(X_H X_{H'})$.

Or, $X_H X_{H'}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$\mathbf{P}(X_H = 1, X_{H'} = 1) = \mathbf{P}(H \subset G, H' \subset G) = \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)$ et donc :

$\mathbf{E}(X_H X_{H'}) = \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)$ si bien que : $\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)}$.

Mais $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) = p_n^{a_{H \cup H'}} = p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$ car $a_H = a_{H'} = a_0$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$. Finalement : $\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}}$.

22 ▷ Si $s_{H \cap H'} = 0$, les événements $H \subset G$ et $H' \subset G$ sont indépendants

($\mathbf{P}(H \subset G, H' \subset G) = p_n^{2a_0} = p_n^{a_0} p_n^{a_0} = \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G)$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$ avec $a_{H \cap H'} = 0$).

On obtient : $\Sigma_0 = \sum\limits_{\substack{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2 \\ s_{H \cap H'} = 0}} \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G)$ et donc :

$\Sigma_0 \leq \sum\limits_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G) = \left(\sum\limits_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G)\right)\left(\sum\limits_{H' \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H' \subset G)\right)$ soit $\boxed{\Sigma_0 \leq \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2}$.

23 ▷ On a $\Sigma_k = \sum\limits_{H \in \mathcal{C}_0} \left(\sum\limits_{\substack{H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)\right)$.

Or, $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) = p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$ car H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$.

Par définition de ω_0, on a $\omega_0 \leq \dfrac{s_{H \cap H'}}{a_{H \cap H'}}$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$ avec $a_{H \cap H'} \geq 1$.

On obtient $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) \leq p_n^{2a_0 - \frac{s_{H\cap H'}}{\omega_0}} = p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$ si $s_{H\cap H'} = k$.

Il en résulte que $\Sigma_k \leq \displaystyle\sum_{H\in\mathcal{C}_0} \left(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}} \right)$.

Mais, $\operatorname{card}\Big(\Big\{H' \in \mathcal{C}_0^2 \mid s_{H\cap H'} = k\Big\}\Big) = \dbinom{s_0}{k}\dbinom{n-s_0}{s_0-k} c_0$.

En effet, on choisit k sommets parmi les s_0 sommets de H pour former l'intersection $H \cap H'$, puis les $n_0 - k$ autres sommets de H' parmi les sommets n'appartenant pas à H et on effectue toutes les copies de G_0 avec les sommets obtenus.

Finalement : $\boxed{\Sigma_k \leq \displaystyle\sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}} \leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} n_0! p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}}$.

24 ▷ On a $\dbinom{r}{q} r^{-q} = \dfrac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{r^q q!} = \dfrac{1(1-\frac{1}{r})\cdots(1-\frac{q-1}{r})}{q!}$.

Or, si $0 \leq k \leq q-1$, $\dfrac{k}{r} \leq \dfrac{q-1}{r} \leq \dfrac{q-1}{q}$ car $r \geq q$.

On obtient $\boxed{\dbinom{r}{q} r^{-q} \geq \dfrac{1}{q!}\left(1 - \dfrac{q-1}{q}\right)^q}$.

Notons $\varepsilon_n = n^{-\omega_0} p_n^{-1}$; donc on a $\lim \varepsilon_n = 0$. On a alors :
$0 \leq \Sigma_k \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \dbinom{s_0}{k}\dbinom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}} = \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \dbinom{s_0}{k}\dbinom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}} n^k$.

On obtient : $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) p_n^{2a_0} n^{s_0-k} c_0 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}} n^k$ où c_1 est une constante indépendante de n.

On a vu à la question 19 ▷ que $\mathbf{E}(X_n^0) = \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) p_n^{a_0}$.

On obtient : $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} n^{s_0} c_0 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}}$.

D'après la question 24 ▷, $n^{s_0} \leq c_2 \dbinom{n}{s_0}$ où c_2 est une constante. On obtient :

$0 \leq \Sigma_k \leq c_1 c_2 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} c_0 \dbinom{n}{s_0} \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}} = c_1 c_2 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$ d'après la question 18 ▷.

Et enfin, d'après la question 18 ▷, $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 c_2 \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$.

Ainsi, $0 \leq \dfrac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} \leq c_1 c_2 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$ si bien que par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = 0$:
$\boxed{\Sigma_k = \mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2\Big)}$.

25 ▷ On a $\dfrac{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{a_0} \dfrac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = \dfrac{\Sigma_0}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} + \sum_{k=1}^{a_0} \dfrac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} \leq 1 + \mathrm{o}(1)$ d'après

les questions 22 ▷ et 24 ▷.

Il en résulte que $\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} = \dfrac{\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) - \left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} \leq \mathrm{o}(1)$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} = 0}$.

26 ▷ D'après les questions 25 ▷ et 12 ▷ et par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 = 0) = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 1}$.

La question 20 ▷ et l'encadré précédent montrent que :
$\boxed{(k^{-\omega_0})_{k\geq 2} \text{ est une fonction de seuil pour la propriété } \mathcal{P}_n}$.

27 ▷ Il s'agit tout simplement de déterminer ω_0 où G_0 est une étoile à d branches.

Si un sous-graphe H de G_0 ne contient pas le centre de l'étoile, on a $a_H = 0$ et il est facile de constater que si H contient le centre de l'étoile, $\dfrac{s_H}{a_H}$ est minimum pour $H = G_0$.
Ainsi, $\omega_0 = \dfrac{d+1}{d}$ et :

$$\boxed{\begin{array}{l} (k^{-\frac{d+1}{d}})_{k\geq 2} \text{ est une fonction de seuil pour la propriété :} \\ \text{«contenir une copie de l'étoile à } d \text{ branches».} \end{array}}$$

Remarque : pour $d = 1$, on retrouve bien le résultat de la question 16 ▷ car un segment est une étoile à une branche.