ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

VENDREDI 21 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERES MP et MPI

Epreuve n° 9

MATHEMATIQUES C (ULSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Définitions et notations

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

- On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé est relativement compacte si elle est incluse dans un compact.
- Sur $\mathbb{R}^d$, on notera $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel, défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ pour tous $x = (x_1, \cdots, x_d)$ et $y = (y_1, \cdots, y_d)$. On notera également $\| \ \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
- Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, on note $C(K, \mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}^d$ que l'on munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$.
- On dit qu'une partie A de $C(K, \mathbb{R}^d)$ est équicontinue en $x \in K$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \text{ tel que } \forall f \in A, \forall y \in B(x,r), \|f(x) - f(y)\| \leqslant \epsilon$$

  où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en x et de rayon r.

  On dit que A est équicontinue si elle est équicontinue en tout point $x \in K$.

On s'intéresse dans tout le sujet au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = y_{init} \end{cases} \tag{1}$$

avec F une fonction sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $y_{init} \in \Omega$.

On dit que ce problème de Cauchy admet une solution si il existe $T \in]0, +\infty]$ et une fonction $\phi : [0, T[\to \mathbb{R}^d$ dérivable telle que $\phi(0) = y_{init}$, $\phi([0,T[) \subset \Omega$ et vérifiant $\phi'(t) = F(\phi(t))$ pour tout $t \in [0, T[$. On dit que (ϕ, T) est une solution du problème de Cauchy.

On dira que (ϕ, T) est une solution maximale du problème de Cauchy (1), si (ϕ, T) est une solution et s'il n'existe pas de solution (ψ, T') qui vérifie $T < T'$ et $\forall t \in [0, T[, \psi(t) = \phi(t)$. Si $T = +\infty$ on dira que ϕ est une solution globale.

Dans tout le sujet on admet que **toute solution peut-être prolongée en solution maximale**.

Les parties I et II sont indépendantes, la partie IV est indépendante des autres parties.

I - Premiers exemples

Dans cette partie, on admet que toutes les équations proposées admettent une unique solution et que celle-ci est globale. De plus on considère uniquement le cas $d = 1$. Soient $a, \theta > 0$ et $0 < y_{init} < \theta$.

1. On considère le problème de Cauchy associé à F_0 définie par :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad F_0(y) = ay \ln\left(\frac{\theta}{y}\right).$$

On note ϕ_0 la solution de ce problème sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$ on a $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$.

   (b) En considérant la fonction $z_0(t) = \ln(\phi_0(t)/\theta)$ trouver l'expression de ϕ_0.

   (c) En déduire que ϕ_0 vérifie $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ et que de plus ϕ_0 est strictement croissante.

2. Pour $0 < \mu \leqslant 1$, on considère F_μ définie par :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad F_\mu(y) = \frac{a}{\mu} y \left(1 - \left(\frac{y}{\theta}\right)^\mu\right).$$

En considérant la fonction $z_\mu(t) = \phi_\mu(t)^{-\mu}$ trouver l'expression de la solution ϕ_μ sur $[0, +\infty[$ associée à F_μ.

3. (a) Montrer que F_μ converge simplement vers F_0 lorsque μ tend vers 0.

   (b) Montrer que ϕ_μ converge simplement vers ϕ_0 lorsque μ tend vers 0.

II - Un théorème de compacité

Dans cette section, on considère K un compact de $\mathbb{R}$. On rappelle que l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R}^d)$ est muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

1. Soit $k > 0$ et B l'ensemble des fonctions de K dans $\mathbb{R}^d$ qui sont k−lipschitziennes. Montrer que B est équicontinue.

Soit A une partie de $C(K, \mathbb{R}^d)$. On cherche à montrer dans la suite de cette partie le théorème suivant :

Théorème 1 : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

— *(P1) A est relativement compacte.*

— *(P2) A est équicontinue et pour tout $x \in K$, l'ensemble $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ est borné.*

2. Montrer qu'une partie $A \subset C(K, \mathbb{R}^d)$ est relativement compacte si et seulement si toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément vers une limite $f \in C(K, \mathbb{R}^d)$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que si A est relativement compacte alors A est équicontinue.
4. Montrer que $(P1) \Rightarrow (P2)$.

On suppose maintenant que A vérifie $(P2)$. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A.

5. Soit $(x_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de K.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $p \geqslant 0$, $f_{\psi_p(n)}(x_p)$ converge lorsque n tend vers l'infini avec $\psi_0 = \varphi_0$ et $\psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p$ pour $p \geqslant 1$.
   (b) Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, $f_{\psi_n(n)}(x_p)$ converge lorsque n tend vers l'infini.
6. (a) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap K$. On notera $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette extraction.
   (b) Pour $x \in K$, montrer que $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence notée $g(x)$ et conclure sur la convergence simple de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur K vers g.
7. (a) Montrer que g est continue sur K.
   (b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur K. *(Indication : on pourra raisonner par l'absurde.)*
   (c) En déduire que $(P2) \Rightarrow (P1)$.

III - Existence de solutions

On considère dans cette partie que la fonction F est continue et $y_{init} \in \Omega$. Pour tout $r \geqslant 0$, on note B_r la boule fermée de centre y_{init} et de rayon r.

1. Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ et $T > 0$ tels que $B_r \subset \Omega$ et tels que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on puisse définir par récurrence, en posant $\Delta t = \frac{T}{N}$, une suite $(y_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ à valeurs dans B_r telle que :

$$y_0 = y_{init}, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n), \forall n \in \{0, \cdots, N-1\}.$$

2. Montrer alors que l'on peut construire une unique fonction ϕ_N continue sur $[0, T]$, affine sur chaque intervalle $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ pour tout $n \in \{0, \cdots, N-1\}$ et telle que $\phi_N(n\Delta t) = y_n$ pour tout $n \in \{0, \cdots, N\}$.

3. Montrer, à l'aide du *Théorème 1*, qu'il existe une sous-suite de ϕ_N qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers une fonction continue ϕ.

4. Montrer que l'on peut définir une suite de fonctions en escalier $\psi_N : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ telle que $\psi_N(t) = \phi_N(t)$ pour $t \in \{n\Delta t \mid n \in \{0, \cdots, N\}\}$ et telle que :
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \phi_N(t) = y_{init} + \int_0^t F(\psi_N(s))ds \text{ pour tout } t \in [0,T].$$
On précisera l'expression des fonctions ψ_N.

5. En déduire qu'il existe une sous-suite de ψ_N qui converge uniformément sur $[0,T]$ et préciser sa limite.

6. Montrer que (ϕ, T) est solution du problème de Cauchy (1) et en déduire le théorème suivant :

   Théorème 2 : Si F est une fonction continue, alors il existe au moins une solution du problème de Cauchy (1).

7. On considère le cas particulier pour $d = 1$ donné pour tout $y \in \mathbb{R}$ par $F(y) = 3|y|^{2/3}$ et $y_{init} = 0$. Montrer que ce problème de Cauchy admet une infinité de solutions globales.

IV - Inclusions Différentielles

On s'intéresse maintenant à une extension du problème de Cauchy (1). On considère cette fois $\mathcal{F} : \mathbb{R}^d \to \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ des parties compactes de $\mathbb{R}^d$. On considère alors le problème d'inclusion différentielle défini par :
$$\begin{cases} y'(t) \in \mathcal{F}(y(t)) \\ y(0) = y_{init}. \end{cases} \tag{2}$$
On s'intéresse aux solutions de ce problème qui sont continues et C^1 par morceaux. Pour $T \in]0, +\infty]$, on dira que (ϕ, T) est une solution de (2) si il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $0 = t_0 < \cdots < t_N = T$ tels que :

(i) ϕ est continue sur $[0, T[$.

(ii) Pour tout $i \in \{0, \cdots, N-1\}$, ϕ soit C^1 sur $]t_i, t_{i+1}[$ et ϕ' admette une limite à droite en t_i et si $i \neq 0$ une limite à gauche en t_i.

(iii) Pour tout $i \in \{0, \cdots, N-1\}$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, on a $\phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t))$.

(iv) Pour tout $i \in \{0, \cdots, N-1\}$, $\lim\limits_{t \to t_i^+} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t_i))$ et si $i \neq 0$, $\lim\limits_{t \to t_i^-} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t_i))$.

(v) $\phi(0) = y_{init}$.

On utilisera comme dans le cas du problème (1) les notions de solutions maximales et globales.

1. Montrer que si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $C_K > 0$ telle que $\mathcal{F}$ vérifie :

$$\forall x, y \in K, \forall v_x \in \mathcal{F}(x), \forall v_y \in \mathcal{F}(y), \quad \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leqslant C_K \|x - y\|^2 \tag{3}$$

alors, le problème (2) admet au plus une solution maximale. *(Indication : On pourra regarder $\|X(t) - Y(t)\|^2$ pour X et Y deux solutions)*

Dans toute la suite, on considère le problème d'inclusion différentielle donné par $d = 2$ et $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \{v^-\} & \text{si } x_1 < 0 \\ \{v^+\} & \text{si } x_1 > 0 \\ [v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] & \text{si } x_1 = 0 \end{cases},$$

où $v^- = (v_1^-, v_2^-) \in \mathbb{R}^2$ et $v^+ = (v_1^+, v_2^+) \in \mathbb{R}^2$ avec $v_1^- \geqslant v_1^+$ et $v_2^- \geqslant v_2^+$.

2. On pose $v^- = (1, 2)$ et $v^+ = (-1, 2)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ vérifie la condition (3).

   (b) On choisit $y_{init} = (0, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

   (c) On choisit $y_{init} = (1, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

3. On pose $v^- = (0, 1)$ et $v^+ = (1, 1)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas la condition (3).

   (b) On choisit $y_{init} = (1, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

   (c) On choisit $y_{init} = (0, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).