Banques MP et MPI inter-ENS – Session 2023
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

- **Coefficients (en % du total des points de chaque concours) :**
  — Lyon : MP concours MP 10,8 % ; MP concours Info 11,3 ; MPI 8,5 %
  — Paris-Saclay : MP concours MP 9,6 % ; MP concours Info et MPI 13,2 %
  — Rennes : MP 9,6 % ; MPI 8,3 %
  — Ulm : MP concours MP 3,7 % ; MP concours Info et MPI 13,3 %

- **Membres du jury :**
  François Bolley, Emeric Bouin, Didier Lesesvre, Pierre Lissy, Benoit Loisel, Vincent Perrollaz, Thomas Simon, correcteurs

---

Présentation générale

Le sujet Math C 2023 portait d'une part sur l'étude et la résolution explicite d'équations (partie I) et d'inclusions (partie IV) différentielles, d'autre part sur la démonstration du théorème de compacité d'Arzelà-Ascoli (partie II) puis du théorème de Cauchy-Peano portant sur les équations différentielles à coefficients continus (partie III).

L'épreuve a permis de tester l'aisance des candidats à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires, avec notamment des arguments variés d'analyse réelle, de convergence uniforme de suites de fonctions, de topologie, de compacité dans les espaces vectoriels normés, et la résolution explicite d'équations différentielles linéaires.

Le sujet présentait deux erreurs, pour lesquelles le concepteur et les relecteurs présentent leurs excuses, notamment aux candidats ayant perdu du temps sur ces questions : ces erreurs concernaient les questions 6 (b) de la partie II et 3 de la partie IV. Nous y reviendrons en détail.

Les notes se sont étalées de 0/20 à 20/20, avec une moyenne de 9,8/20 et un écart-type de 3,85. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. Il n'a pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. Au contraire, le jury a apprécié la démarche de certains candidats annonçant clairement et honnêtement une possibilité de démonstration, qu'elle soit finalement réalisable ou non, et reconnaissant ne pas avoir en main les arguments précis pour la mener à bien. Notons par ailleurs que l'utilisation de notions et de raisonnements non ou mal maîtrisés, qu'ils soient ou non au programme du concours, n'est pas encouragée. La présentation entre également pour une part importante dans l'appréciation d'une copie, et l'utilisation d'un brouillon, même ponctuelle, est fortement recommandée. Enfin, il est rappelé qu'il convient de bien dégager les hypothèses nécessaires pour invoquer tout résultat au programme permettant de répondre à une question du sujet.

De l'avis du jury, le problème proposé était relativement long. Comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, il faisait appel à des notions et raisonnement très variés et parfois difficiles d'analyse et topologie.

Aucune copie n'est parvenue à résoudre entièrement le sujet. Quelques candidats d'excellent niveau sont parvenus à traiter correctement en quasi totalité les parties I à III. La partie IV n'a été abordée que superficiellement, et n'a été abordée sérieusement que dans un très petit nombre de copies.

Le jury a constaté que de nombreux candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnements élémentaires d'analyse réelle et de convergence de suites de fonctions. En particulier, les justifications d'inégalités strictes et non larges, et d'interversion de limites et d'intégrales étaient trop souvent absentes ou incorrectes. Le nombre moyen de questions abordées étant assez faible, le barème a été adapté en conséquence. Répondre correctement à la partie I et aux questions 1 et 2 de la partie II permettait d'atteindre une note supérieure à la moyenne. Traiter parfaitement les parties I et II permettait d'obtenir une très bonne note. Terminer avec succès la partie III assurait alors d'avoir une des toutes meilleures notes. Le jury souhaite rappeler aux candidats qu'ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples de chaque partie. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie I

La première partie du sujet proposait l'étude et la résolution explicite de deux équations différentielles non linéaires, en admettant qu'elles admettent une unique solution et que celle-ci est globale. Par un argument d'analyse réelle on vérifiait que la solution reste dans un certain intervalle, puis des changements de fonctions proposés dans le sujet permettaient de se ramener à des équations différentielles linéaires, que l'on pouvait résoudre explicitement, avant d'en déduire l'expression explicite de la solution des équations différentielles non linéaires initiales.

Cette partie a été abordée par tous les candidats, mais de façon très inégale. Le jury a été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des candidats ; il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

Les questions 1 (a) et 1 (c) ne présentaient pas de difficulté et ont en général été bien traitées. Le jury attendait néanmoins que les raisonnements soient précis, notamment dans le caractère strict ou large des inégalités.

Dans les questions 1 (b) et 2, le jury a pénalisé les raisonnement purement informels. Il a valorisé la justification de la bonne définition des fonctions z_0 et z_μ, puis la mention de l'unicité de la solution, ou une vérification des solutions dans un argument de type analyse-synthèse.

Les questions 3 (a) et 3 (b) pouvaient se résoudre par de simples développements limités respectivement dans les quantités $F_\mu(y)$ pour y donné et $\phi_\mu(t)$ pour t donné, qui dans l'ensemble ont bien été réalisés. Dans ces questions, l'utilisation d'équivalents au lieu de développements limités s'est révélée périlleuse. Enfin, dans la question 3 (b), les tentatives d'utilisation du résultat de la question 3 (a) dans un éventuel raisonnement de stabilité des solutions vis-à-vis des coefficients de l'équation ont toutes échoué.

Partie II

La deuxième partie du sujet portait sur la démonstration du théorème de compacité d'Arzelà-Ascoli. Elle faisait à plusieurs reprises appel à des arguments d'extraction de sous-suites, ou portant sur deux indices, parfois délicats.

Les questions 1 et 4 ne présentaient pas de difficulté mais le jury a bien veillé à la place des quantificateurs dans la rédaction proposée par les candidats. Dans la question 1, le jury a apprécié le fait que les (trop rares) candidats mentionnent qu'une fonction lipschitzienne est continue.

La question 2 était délicate et sa résolution propre nécessitait une bonne maîtrise de raisonnements complexes, notamment dans la réciproque. Les copies présentant les arguments les plus clairement énoncés se sont in fine révélées êtres les meilleures dans l'ensemble de l'épreuve. De nouveau le jury a sanctionné les raisonnements flous.

La question 3 était de nouveau délicate. Le jury a partiellement valorisé les trop rares copies initiant proprement le raisonnement par l'absurde, en écrivant proprement la négation de la propriété à démontrer.

Les questions 5, 6, 7 permettaient de démontrer la réciproque $(P2) \Rightarrow (P1)$ à l'aide du procédé diagonal de Cantor.

La question 5 (a) nécessitait une rédaction soignée et de trop nombreux candidats n'ont pas su clairement montrer leur compréhension de la composition des extractions. De nouveau le jury a partiellement valorisé les copies indiquant seulement une idée, sans justification ni rédaction.

La question 5 (b) n'a été que rarement bien traitée. Il s'agissait de bien comprendre et de clairement mettre en évidence le fait que la suite considérée est une suite extraite d'une suite que l'on sait convergente d'après 5 (a). De trop nombreuses copies ont proposé un argument faux fondé sur de vagues suites croissantes.

La question 6 (a) a été en général bien traitée.

La question 6 (b) étudiait la convergence simple, en tout point de K, de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en 6 (a) sur une suite de points. C'est dans cette question que résidait la première, et principale, erreur de l'énoncé. Elle était rédigée dans l'optique où le compact K était un intervalle : c'est dans ce cadre que le théorème d'Arzelà-Ascoli est utilisé en partie III. Dans le cas où le compact K est un intervalle non réduit à un point, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ tout élément x de K peut être approché par une suite d'éléments de $K \cap \mathbb{Q}$ - ce n'est par exemple pas le cas si K est réduit à un réel non rationnel ; on peut alors utiliser la question 6 (a). La plupart des candidats ont procédé en affirmant que tout x pouvait être approché par une suite d'éléments de $K \cap \mathbb{Q}$. Le jury n'a pas pu leur en tenir rigueur. Quelques rares excellentes copies ont soulevé le problème, ce que le jury a grandement apprécié ; elles se sont in fine révélées être les toutes meilleures dans l'ensemble de l'épreuve.

Dans la question 7 (a), de trop nombreux candidats ont, à tort, cru pouvoir déduire la continuité de g de la seule convergence simple de la suite de fonctions continues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sans utiliser son équicontinuité. Ici encore le jury a veillé à la bonne place des quantificateurs.

Le sujet proposait de résoudre la question 7 (b) par l'absurde. Le jury a regretté de voir tant de copies écrire la négation de manière erronée, et a partiellement valorisé sa seule écriture sans erreur.

La question 7 (c) ne posait pas de difficulté.

Partie III

La troisième partie proposait de démontrer le théorème de Cauchy-Peano à l'aide d'un schéma d'Euler et du théorème de compacité d'Arzelà-Ascoli démontré dans la partie II.

La question 1 proposait de démontrer l'existence de ce schéma. Il s'agissait de mettre en évidence un rayon $r > 0$, un temps $T > 0$, et comme étape intermédiaire une borne sur F sur la boule fermée de rayon r, le tout *uniformément en* N. Ce point était crucial pour la suite et a trop souvent été négligé.

La question 2 ne présentait pas de difficulté et pouvait être résolue de manière très courte. Elle nécessitait néanmoins une rédaction précise, la mention de la continuité des fonctions construites, et la mention de leur unicité, éventuellement par analyse-synthèse.

Dans la question 3, la plupart des candidats ont bien vu que les fonctions ϕ_N étaient bornées et lipschitziennes, mais trop peu ont vérifié, voire mentionné, le fait crucial que les bornes et constantes de Lipschitz étaient uniformes en N.

La question 4 ne présentait pas de difficulté, une fois la question 2 bien comprise et traitée.

La question 5 était délicate. Elle faisait appel à l'expression des fonctions ψ_N construites dans la question 4 et à l'extraction obtenue dans la question 3, et l'on devait veiller à ce que la convergence obtenue soit bien uniforme. Trop peu de candidats ont su répondre proprement à cette question.

La question 6 faisait appel à un passage à la limite dans l'intégrale, qui combinait des arguments de convergence uniforme et d'uniforme continuité sur un compact. De nouveau le jury a regretté de la voir si peu bien traitée, et au contraire de voir tant de passages à la limite imposés sans aucune justification.

La question 7 proposait d'étudier un exemple d'équation différentielle pour lequel l'unicité de la solution est mise en défaut. Elle était difficile et quasiment aucun candidat ne l'a traitée.

Partie IV

La quatrième partie du sujet portait sur l'étude d'inclusions différentielles.

La question 1 proposait de démontrer un résultat général d'unicité des solutions maximales sous une condition de caractère lipschitzien « d'un côté » vérifiée par les champs de vecteurs dirigeant l'inclusion. Sa résolution, très délicate, reposait sur un argument de type Gronwall, qui a été bien mené par les très rares copies ayant abordé cette question. Une solution étant par définition un couple formé d'une fonction et d'un temps d'existence, on devait bien veiller à travailler sur les intervalles d'existence des solutions, et non seulement sur les valeurs de ces solutions.

Les question 2 et 3 présentaient deux exemples.

L'exemple de la question 2 entrait dans le cadre de la question 1, ainsi qu'on le vérifiait dans la question 2 (a) ; il suffisait donc, dans chacun des deux exemples 2 (a) et 2 (b), d'exhiber une solution maximale en travaillant sur chaque coordonnée successivement.

La question 3 proposait d'étudier un exemple n'entrant pas dans le cadre de la question 1, et donc pour lequel l'unicité devait être montrée directement, par exemple dans un raisonnement de type analyse - synthèse. Formellement l'exemple de la question 3 n'entrait même pas dans le cadre de l'énoncé puisque la condition $v_1^- \geqslant v_1^+$ n'était pas vérifiée. Il s'agissait de la seconde erreur du sujet.

Ces deux questions n'ont été abordées que par de très rares copies, notamment la question 3. Le jury n'a pas souhaité valoriser les copies tentant de récolter quelques points de-ci, de-là, sans compréhension même partielle de cette partie.

⋆ ⋆
⋆