

Du Rubik's Cube au Square-1 : structure combinatoire et recherche du nombre de Dieu

0. Motivation et ancrage

Motivation

Les casse-têtes mathématiques, et en particulier les Rubik's Cube ont toujours été pour moi source de fascination. Ayant déjà participé à plusieurs compétitions, j'ai voulu m'intéresser et étudier mon Rubik's Cube préféré, bien moins connu que le 3x3, appelé le Square-1.

46 mots

Ancrage

L'étude des Rubik's Cube fait intervenir des graphes de permutations et utilise des propriétés cycliques. Je me propose d'étudier les aspects du "nombre de Dieu" et d'autres notions impliquant divers mouvements et permutations cycliques.

33 mots

1. Positionnements thématiques & mots-clés

Positionnement thématique

Mathématiques appliquées – Informatique – Combinatoire – Algorithmique – Modélisation – Théorie des groupes – Recherche opérationnelle – Complexité algorithmique. (peut-être d'autres)

Mots-clés français

Cube de Rubik / Théorie des graphes / Nombre de Dieu / Supermix (Pire mélange) / Groupe de permutations

Mots-clés anglais

Rubik's Cube / Graph theory / God's number / Supermix (Worst scramble) / Permutation group.

2. Bibliographie commentée

L'étude scientifique des puzzles de permutations, en particulier du Rubik's Cube et de ses variantes, fait intervenir de la combinatoire, de la théorie des groupes et de l'algorithmique. Ces cubes, bien qu'issus du domaine ludique, se sont progressivement révélés comme de véritables merveilles mathématiques, illustrant à la fois l'explosion combinatoire et les limites des méthodes classiques d'exploration exhaustive. Leur analyse repose sur une question centrale : comment décrire l'ensemble des configurations accessibles et comment comprendre les lois qui gouvernent leur fonctionnement ? Ces

questions ont conduit à des développements théoriques majeurs, tels que la modélisation d'un puzzle comme un groupe de permutations restreint par des contraintes mécaniques ou géométriques [1].

Le Rubik's Cube 3×3 en est le cas d'étude emblématique. Il a servi de modèle pour formaliser l'espace des états, définir des métriques de distance entre configurations et développer des algorithmes de recherche optimaux. L'un des résultats les plus marquants est la détermination de son diamètre, plus connu sous le nom de nombre de Dieu : le nombre minimal de mouvements nécessaires pour résoudre n'importe quel mélange atteignable. Grâce à une combinaison d'analyse symétrique, de partition de l'espace et d'heuristiques, ce diamètre a été prouvé égal à 20 dans la métrique des quarts-de-tour [2].

Cependant, dès que l'on s'éloigne du 3×3 , l'étude se complexifie rapidement. En effet, le 3×3 est le Rubik's Cube le plus standard et traditionnel, mais plusieurs variantes existent, que ce soit par leur taille (4×4 , 5×5 ...), leur forme (le Megaminx est un dodécaèdre, le Pyraminx est une pyramide), mais aussi et surtout par la caractéristique de shape-shifting présente dans le Mirror-Cube, le Windmill et plus particulièrement, le Square-1, le puzzle auquel je me suis intéressé.

Le Square-1, inventé plus tardivement, ne conserve pas sa forme au cours des manipulations contrairement au Rubik's Cube : certaines rotations transforment les deux couches en une silhouette irrégulière, rendant certains mouvements momentanément impossibles. Ce comportement appelé le shape-shifting, introduit une dimension géométrique absente des cubes classiques, et complique fortement la description algébrique du puzzle [4]. L'espace des configurations du Square-1 est bien plus difficile à modéliser de façon uniforme, car les positions doivent être décrites non seulement par la permutation des pièces, mais aussi par la forme de la couche supérieure et inférieure.

Plusieurs analyses mathématiques et contributions communautaires, montrent que la résolution du Square-1 peut être décomposée en deux phases : le Back-to-cube, qui ramène le puzzle à une forme « cubique », et la phase de permutation, qui manipule les pièces une fois la géométrie stabilisée [4][5]. Cette séparation suggère des approches algorithmiques inspirées de celles utilisées pour le Rubik's Cube : exploration partielle de l'espace d'états, heuristiques admissibles, IDA* particulièrement adaptée aux espaces trop grands pour être explorés en largeur complète [3][6]. Toutefois, l'absence de structure de groupe aussi régulière que celle du 3×3 rend les résultats difficiles à formaliser et font du nombre de Dieu du Square-1 une valeur encore inconnue à ce jour.

Ceci met en évidence plusieurs difficultés fondamentales : comment représenter efficacement un puzzle dont la géométrie varie ? Comment définir une métrique pertinente lorsque les mouvements admissibles changent en fonction de la configuration ? Quelle stratégie permettrait d'obtenir une borne inférieure fiable du nombre de Dieu sans explorer l'espace complet, dont la taille, bien que réduite par rapport au Rubik's Cube, reste beaucoup trop élevée pour un parcours exhaustif ?

Ces questions montrent que l'étude du Square-1 nécessite la combinaison de modélisation mathématique, d'approches combinatoires et de techniques algorithmiques avancées est indispensable. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce TIPE : comprendre les mécanismes qui ont permis la résolution du cas bien étudié du Rubik's Cube, analyser les obstacles spécifiques au Square-1, puis envisager comment adapter certaines méthodes pour obtenir des estimations ou des bornes partiellement validées de son diamètre.

648 mots

3. Problématique retenue

Comment modéliser mathématiquement l'espace des configurations du Square-1 et dans quelle mesure peut-on adapter les méthodes utilisées pour déterminer le nombre de Dieu du Rubik's Cube 3×3 afin d'estimer ou de borner celui du Square-1 ?

38 mots

4. Objectifs du TIPE

L'objectif est d'abord de modéliser l'espace des configurations du Square-1 et de comparer sa structure combinatoire à celle du Rubik's Cube 3×3. Je cherche ensuite à déterminer une borne inférieure du nombre de Dieu du Square-1 en utilisant des méthodes inspirées du 3×3 (BFS partiel, heuristiques et IDA*). Enfin, j'aimerais développer une implémentation permettant d'explorer expérimentalement l'espace d'états afin d'estimer la difficulté réelle du puzzle.

72 mots

5. Liste de références bibliographiques

1. Joyner, D. *Adventures in Group Theory*.
2. Rokicki, T., et al. *The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty*.
3. Jaap Scherphuis. *Jaap's Puzzle Page – Square-1*.
4. Speedsolving Wiki – *Square-1 Group Theory*.
5. Korf, R. *Depth-First Iterative Deepening and A** (1985).
6. Hansen, E. – *Pattern Databases and Search Performance*.