Le théorème de Szemerédi–Trotter et les jeux Maker-Breaker

Paul RAPHAEL

Numéro de candidat: 33557

2024

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Les jeux Maker-Breaker

Un premier jeu

Imaginons le jeu suivant:

- Le plateau: Z^2
- Le premier doit joueur doit aligner n points sur une même droite sans point de l'autre joueur
- Le deuxième joueur doit l'en empêcher

Exemples

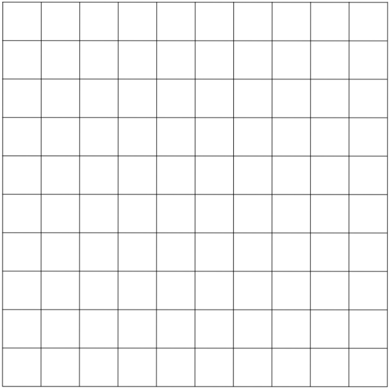

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

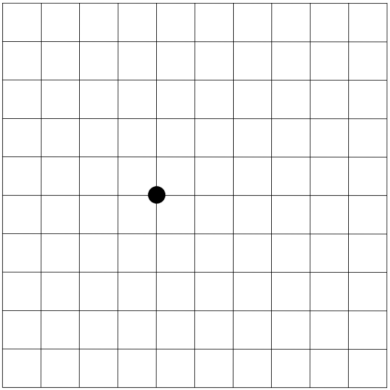

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

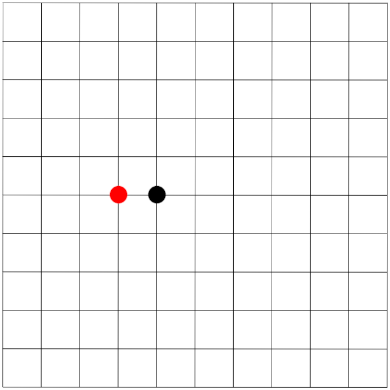

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

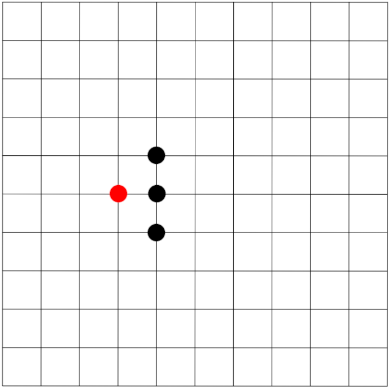

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

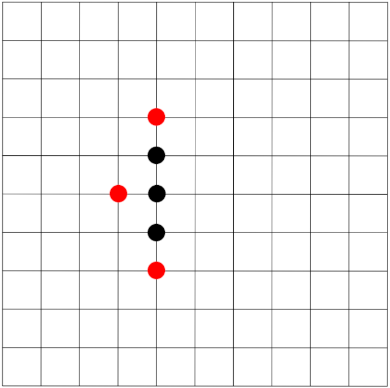

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

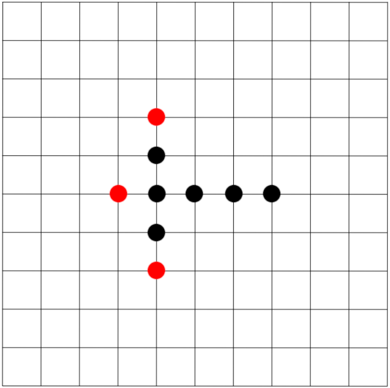

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

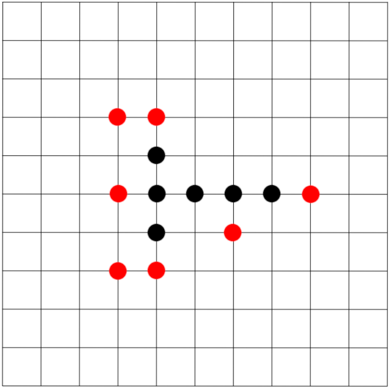

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

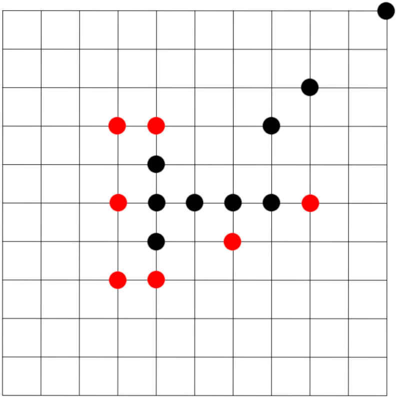

Figure: Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

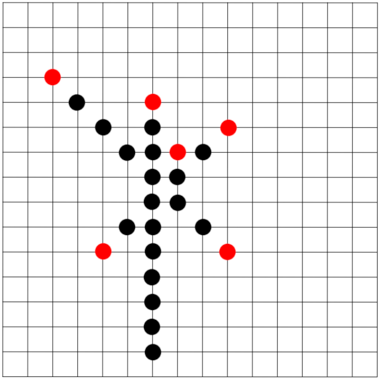

Figure: Partie pour n=10, m(t)=2t, b(t) = t

Un resultat majeur

Théorème

Soit $c(t) = t^{\alpha}$, d une fonction, et, pour n > 1, soit τ_n le temps de victoire pour le jeu (c, d) n à la suite.

1. Si $\alpha > 1$ et $\lim_{t \to +\infty} \frac{d(t)}{log(t)} = +\infty$ alors $c(\tau_n) = (1 + o(1))n$
2. Si $\alpha < 1$ et $\lim_{t \to +\infty} \frac{d(t)}{t^{1-\alpha}} = +\infty$ alors $c(\tau_n) = (1 + o(1))n$

Un théorème majeur

Présentation du problème

On se donne

- P un ensemble fini de points
- L un ensemble fini de lignes

On peut majorer les incidences par

- $|L||P|$
- $|I(P,L)| = O(|L| + |L|^{\frac{1}{2}}|P|)$

Le théorème de Szemerédi-Trotter

Théorème 1: Szemerédi-Trotter

Si on se donne

- P un ensemble fini de points distincts
- L un ensemble fini de lignes distinctes

alors en notant

$$I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$$

, on a

$$|I(P, L)| = O(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |P| + |L|) \tag{1}$$

Les graphes planaires

On note un graphe $G = (V, E)$, ou V est l'ensemble des sommets du graphe, E l'ensemble des arêtes. Les graphes sont considérés comme non orientés, sans boucle et à arêtes simples.

Définition

Graphe planaire

Un graphe simple G est dit planaire si on peut le représenter dans le plan sans que deux de ses arêtes ne se croisent.

Exemples

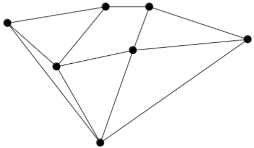

Figure: Graphe planaire

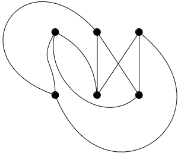

Figure: K33

Propriétés

Propriété 1

Soit G un graphe planaire. Tout sous-graphe de G est également planaire.

Propriété 2

Si $G = (V, E)$ est un graphe planaire, et que l'on note F l'ensemble de ses faces

$$\sum_{f \in F} deg(F) = 2|E|$$

ou $deg(F)$ est le nombre d'arêtes ajdacentes à la face F.

La caractéristique d'Euler

Théorème 2: L'identité d'Euler

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire connexe. Alors,

$$|V| - |E| + F = 2$$

ou Fest le nombre de faces du graphe.

Exemple

- 7 sommets
- 6 faces (on compte la face extérieure)
- 11 arêtes
- $6 + 7 - 11 = 2$

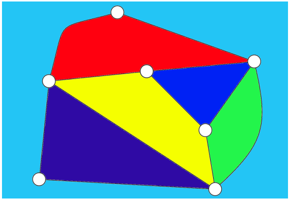

Figure: Graphe 1

Construction des graphes planaires

Lemme 1

Tout graphe planaire connexe G peut s'obtenir en ajoutant un nombre fini d'arêtes à partir d'un arbre, tout en conservant le caractère planaire au long du processus.

Preuve: On raisonne par récurence sur le nombre de cycles élémentaires du graphe.

Exemple

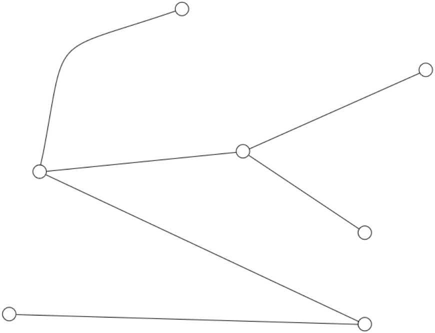

Figure: Construction du graphe 1

Exemple

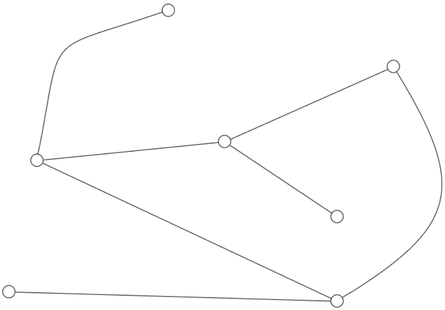

Figure: Construction du graphe 1

Exemple

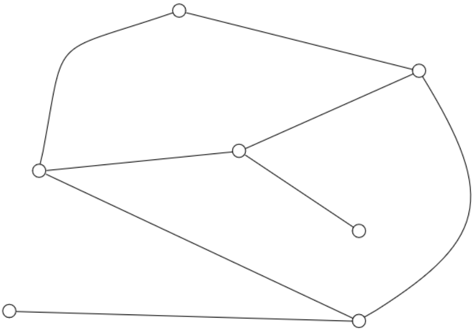

Figure: Construction du graphe 1

Exemple

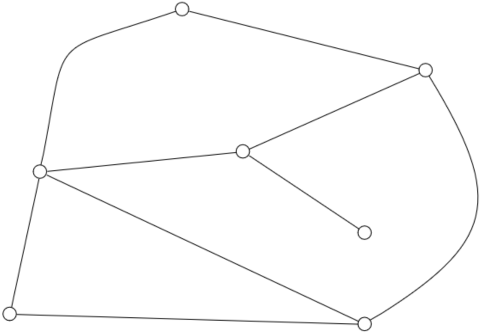

Figure: Construction du graphe 1

Exemple

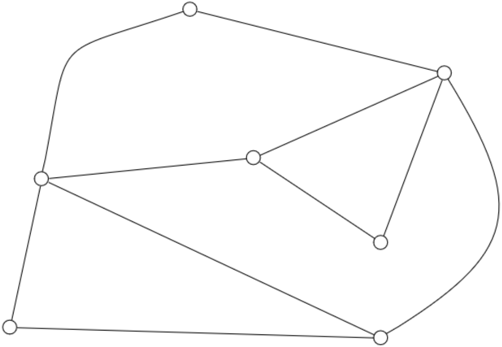

Figure: Construction du graphe 1

Exemple

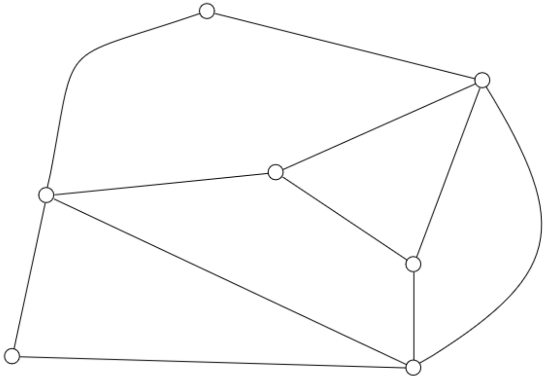

Figure: Construction du graphe 1

Preuve du théorème 2

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe

- Si G est arbre, alors $|E| = |V| - 1$ et $F = 1$
- Ensuite, pour un graphe G, on applique le lemme, en remarquant que les graphes intermédiaires sont planaires en tant que sous graphes de G.
- On conclut car le procédé ne modifie pas la quantité $|V| - |E| + F$

Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe planaire, alors: $|V| - |E| + F \geqslant 2$ ou F est le nombre de faces du graphe.

Preuve: On raisonne sur les composantes connexes du graphe

Théorème 3: l'inégalité des croisements

Soit $G = (E, V)$ un graphe simple. Si $|E| \geqslant 4|V|$ alors

$$cr(G) \geqslant \frac{|E|^3}{64|V|^2} \tag{2}$$

où $cr(G)$ est le nombre de croisements de G.

Propriété 3

Si G est un graphe planaire alors $|E| \leqslant 3|V|$

Preuve: Le résultat est évident si G a moins de 3 arêtes. Sinon:

- *Chaque face est adjacente à au moins 3 arêtes, donc $2|E| \geqslant 3|F|$ (Propriété 2)*
- *La caractéristique d'Euler donne $|E| \leqslant 3|V| - 6 \leqslant 3|V|$*

Corollaire

Pour tout graphe $G = (V, E)$, on a $cr(G) \geqslant |E| - 3|V|$

La preuve se fait en appliquant la propriété 3 au sous graphe G' de G rendu planaire en retirant $cr(G)$ arêtes

Un peu de probabilité

Donnons-nous un réel $0 \leqslant p < 1$.

- $G' = (V', E')$ où on prend dans V' les arêtes de V avec probabilité p
- On admet qu'un croisement dans un graphe non planaire est dû à 4 sommets.
- On passe à l'espérance : $p^4 cr(G) \geqslant p^2|E| - 3p|V|$
- Pour $0 < p = \frac{4|V|}{|E|} \leqslant 1$ on conclut

Démonstration du théorème

Construction astucieuse et considérérations élémentaires

Soit P un ensemble fini de points et L un ensemble fini de lignes, où chaque ligne contient au moins deux points de P.

- On pose $G = (V, E)$ où $V = P$ et où $(u, v) \in E \leftrightarrow \exists l \in L$ tel que $(u, l) \in I(P, L)$ et $(v, l) \in I(P, L)$
- $|E| = |I(P, L)| - |L|$
- G est un graphe simple, sans boucle.
- $|L|^2 \geqslant cr(G)$

Application de l'inégalité des croisements

- Soit $|E| < 4|P|$ ie $|I(P,L)| \leqslant 4|P| + |L|$, et donc $|I(P,L)| = O(|P| + |L|)$
- Soit le théorème 3 donne $|L|^2 \geqslant \frac{(|I(P,L) - |L|)^3}{64|P|^2}$ soit $|I(P,L)| = O(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |L|)$

Corollaire

Le nombre m de lignes contenant k points est un $O(\frac{|P|^2}{k^3} + \frac{|P|}{k})$

Retour sur le jeu

Le jeu des corbeilles

On imagine le jeu suivant, dont l'étude est cruciale pour comprendre le premier jeu: Pour des fonctions M et b à valeurs entière, M croissante, et T un entier, on définit le jeu de type (M, b, T):

- On suppose que l'on à $1 + \sum_{i=1}^{T} b(i)$ corbeilles
- A chaque tour, le constructeur place un certain nombre de points dans les corbeilles
- Le nombre de points qu'il place doit vérifier : au plus $M(s)$ points ont été placés lors des s derniers tours
- A chaque tour i on retire les i corbeilles avec le plus de points
- Il faut maximiser le poids (nombre de points) dans la dernière corbeille.

Le jeu des corbeilles

Lemme

Dans un jeu des corbeilles de type (M, b, T), si

- $M(0) = 0$
- pour tout s on a $\sum_{t=s}^{T} b(t) \geqslant b(T)(\frac{T-s+1}{2})$

alors le jeu se termine avec un poids de corbeille majoré par

$$\frac{2}{b(T)} \sum_{t=1}^{T} \frac{\Delta M(t)}{t}$$

où $\Delta M(t) = M(t) - M(t-1)$

Démonstration du théorème

Soit $\epsilon > 0$. On va

- Donner une stratégie pour le destructeur
- Montrer qu'il peut la respecter
- Montrer que pour n assez grand, les conditions sur le temps de victoire sont respectée

Commençons par fixer $\epsilon > 0$, et supposons par l'absurbe que le constructeur gagne en temps $T + 1$ avec $c(T) > (1 - \epsilon)n$

La stratégie

Stratégie pour le destructeur :

- Trouver les segments actifs du constructeur avec le plus de points
- Réaliser une $\epsilon/2$ séparation, ce qui se fait avec $4/\epsilon$ points

Réduction

- $\tilde{d}(t) = \frac{\epsilon d(t)}{4}$ et $M(s) = \mathrm{Szt}(T^\alpha s, \tilde{d}(T)s + 1)$
- Les corbeilles sont les segments actifs avec $\epsilon n/2$ points au moins
- Le poids vaut le nombre de points moins $\epsilon n/2$

On voit donc que le constructeur gagne en temps T+1 dans le premier jeu seulement s'il a au moins $\epsilon n/2$ poids dans la dernière corbeille dans cette configuration, (où b=d)

Conclusion

Si on note Π le poids dans la dernière corbeille, alors

$$\Pi = O(\frac{1}{\tilde{d}(T)}(T^{(2\alpha+1)/3}\tilde{d}(T)^{2/3} + T^{\alpha}log(T) + \tilde{d}(T)log(T)) \tag{3}$$

$$= O(\frac{1}{d(T)}(T^{(2\alpha+1)/3}d(T)^{2/3} + T^{\alpha}log(T) + d(T)log(T)) \tag{4}$$

Amélioration du théorème de Szemerédi–Trotter

Théorème admis

Théorème 5

Soit G un graphe tel que $|V| \geqslant 3$, que l'on peut représenter dans le plan sans qu'une arête ne croise plus de 3 autres. Alors

$$|E| \leqslant 5.5(|V| - 2)$$

Théorème 6

Pour G un graphe avec plus de trois arêtes,

$$cr(G) \geqslant \frac{7}{3}|E| - \frac{25}{3}(|V| - 2)$$

On en déduit le théorème suivant

Théorème 7

Pour tout graphe avec au moins 3 arêtes,

$$cr(G) \geqslant 4|E| - \frac{103}{6}(|V| - 2).$$

Amélioration de l'inégalité des croisements

Proposition

Pour tout graphe G tel que $\frac{103}{16}\frac{|V|}{|E|} \leqslant 1$,

$$cr(G) \geqslant \frac{1024}{31827}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Dans le cas général, on peut montrer que

$$cr(G) \geqslant \frac{1}{31,1}\frac{|E|^3}{|V|^2} - 1,06|V|$$

Théorème de Szemerédi–Trotter raffiné

Si on se donne

- P un ensemble de points distincts
- L un ensemble de lignes distinctes

alors en notant $I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$, on a

$$|I(P, L)| \leq 2.5|P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P| + |L|. \tag{5}$$